ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Grundlagen der technischen Risikoanalytik

Modellierungsansätze

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

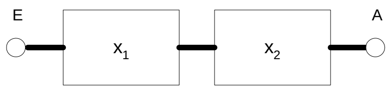
DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Inhalt

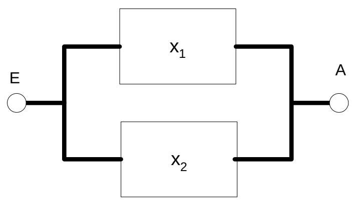
- Modellierungsansätze: Zuverlässigkeitsblockdiagramme, Boolesche Algebra und Systemfunktion, Markoff-Ketten
- spezielle Ansätze der Auswertung: Bayes-Statistik
- Zuverlässigkeits-Datenquellen

Zuverlässigkeitsblockdiagramm (ZBD)

Basissysteme



Seriensystem



Parallelsystem

Ein ZBD

- hat einen Eingang E
- hat einen Ausgang A
- ein (ununterbrochener) Weg von E nach A bedeutet "Funktion" des Systems
- alle Einheiten funktionieren

Einführung in die Zustandsanalyse

Bezeichnungen

- X_i : Einheit (Komponente i) weist den Zustand "**Funktion**" auf: ($x_i = 1$)
- $\overline{X}_i$: Einheit (Komponente i) weist den Zustand "**Ausfall**" auf ($x_i = 0$)
- $S, (\overline{S})$: Boolesche Systemfunktion "Funktion" ("Ausfall")
- $p_i, (q_i)$: Überlebenswahrscheinlichkeit (Ausfallwahrscheinlichkeit) der Einheit i
- R, (F): Überlebenswahrscheinlichkeit (Ausfallwahrscheinlichkeit) des Systems
- entsprechendes für $p_i(t)$, $q_i(t)$, $R(t)$, $F(t)$.

wichtige Grundlagen

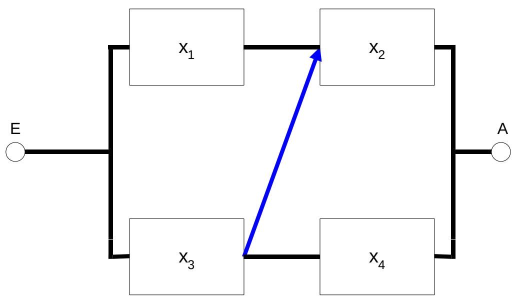
- $R + F = 1$
- $p + q = 1$
- Idempotenzgesetz: $A \wedge A = A;\ A \vee A = A$
- $x_i = 1 - \overline{X}_i$

Vergleichende Modellierung der Basissysteme

Seriensystem	Parallelsystem
funktioniert, wenn alle Einheiten funktionieren (den Zustand 1 aufweisen)	fällt aus, wenn alle Einheiten ausfallen (den Zustand 0 aufweisen)
Beispiel (2 Einheiten)	
$R = p_1 \cdot p_2$	Die Ereignisse des Überlebens schliessen sich nicht gegenseitig aus; sie sind voneinander unabhängig $R = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$
$R(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t);\ F(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i(t))$	$F(t) = \prod_{i=1}^{n} q_i(t);\ R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i(t))$

Berechnung von Brücken- und anderen Schaltungen

Eine Möglichkeit:



Funktionstabelle:

W_i	x_1	x_2	x_3	x_4
W_1	1	1	0	0
W_2	0	0	1	1
W_3	0	1	1	0
W_4	1	1	1	0
W_5	1	1	0	1
W_6	0	1	1	1
W_7	1	0	1	1
W_8	1	1	1	1

Berechnung der Zuverlässigkeit

$$\begin{aligned} s(\underline{x}) = \; & x_1 x_2 (1-x_3)(1-x_4) \\ & + x_3 x_4 (1-x_1)(1-x_2) \\ & + x_2 x_3 (1-x_1)(1-x_4) + x_1 x_2 x_3 (1-x_4) \\ & + x_1 x_2 x_4 (1-x_3) + x_2 x_3 x_4 (1-x_1) \\ & + x_1 x_3 x_4 (1-x_2) + x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

ausmultiplizieren

$$s(\underline{x}) = x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 x_4$$

Annahmen

- alle Komponenten sind identisch
- $p = 0.9$.

Ergebnis

$$R = 3p^2 - 2p^3 = 0.972$$

Boolesches Modell

Funktionsfähigkeitsmodell, bei dem die auftretenden Zusammenhänge und Verknüpfungen in Form von Booleschen Funktionen mit zweiwertigen Variablen zur Charakterisierung der Zustände der Systembestandteile gegeben sind.

In der Zuverlässigkeitsanalytik

- **Ausgangssituation**: Funktion (in Betrieb) oder Ausfall (nicht in Betrieb)
- **Frage**: Ist ein System in Funktion oder ausgefallen, wenn man nur die Zustände der Komponenten kennt?

Schaltalgebra und Boolesche Algebra

Ausgangspunkt: Schaltalgebra

Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist ein algebraisches System, in dem zweiwertige Schaltvariable x, y, ... mit dem Wertevorrat (0, 1) durch die Operationen

- Konjunktion (UND, $\wedge$): Durchschnitt
- Disjunktion (inklusives ODER, $\vee$): Vereinigung
- Negation (NICHT, $\bar{\ }$)

miteinander verknüpft werden.

Schaltalgebra

- Die Verknüpfungen sind keine Rechenoperationen im Sinne des Rechnens mit Zahlen. Stattdessen gelten die sog. Wahrheitstafeln:

$x \wedge y$

y / x	**0**	**1**
x		
0	0	0
1	0	1

$x \vee y$

x / y	**0**	**1**
y		
0	0	1
1	1	1

$\bar{x}$

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

•Die Zeit ist im System der Schaltalgebra nicht explizit enthalten
•Es gelten die Regeln der Booleschen Algebra

Boolesche Algebra

$$X = \begin{cases} \mathrm{L}: & \text{Zustand erfüllt} \\ \mathrm{O}: & \text{Zustand \textit{nicht} erfüllt} \end{cases}$$

symbolisch	Beschreibung	symbolisch	Beschreibung
$X \cap Y = X \cap Y$ $X \cup Y = X \cup Y$	kommutatives Gesetz	$\bar{\bar{X}} = X$	
$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z)$ $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z)$	assoziatives Gesetz	$\left(\overline{X \cap Y}\right) = \bar{X} \cup \bar{Y}$ $\left(\overline{X \cup Y}\right) = \bar{X} \cap \bar{Y}$	**de-Morgansches Theorem**
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	distributives Gesetz	$\mathrm{O} \cap X = \mathrm{O}$ $\mathrm{O} \cup X = X$	
$X \cap X = X$ $X \cup X = X$	**Idempotenzgesetz**	$\mathrm{L} \cap X = X$ $\mathrm{L} \cup X = \mathrm{L}$	
$X \cap (X \cup Y) = X$ $X \cup (X \cap Y) = X$	Absorptionsgesetz	$X \cup \left(\bar{X} \cap Y\right) = X \cup Y$	
$X \cup \bar{X} = \mathrm{L}$ $X \cap \bar{X} = \mathrm{O}$	▪ ausgeschlossener Widerspruch ▪ ausgeschloss. Dritte	$X \cap \left(\bar{X} \cup Y\right) = X \cap Y$	

Voraussetzungen des Booleschen Modells

- Funktionsfähigkeit eines abbgebildeten Systems lässt sich mit dualen Aussagen der Art „wahr“ und „falsch“ formal hinreichend genau beschreiben
- keine zeitlichen Abhängigkeiten des Ausfallverhaltens der Systemeinheiten (der Boolesche Ansatz liefert statische Modelle)
- keine Instandsetzung
- stochastisch unabhängiges Ausfallverhalten der Einheiten.

Anmerkung

Oft lassen sich Systeme, bei denen die Voraussetzungen nicht voll gegeben sind, ebenfalls durch den Booleschen Ansatz beschreiben, beispielsweise durch „Hilfsaussagen“ der Art „Einheit fällt innerhalb eines vorgegebenen Zeitraumes Δt aus“.

Boolesche Funktion

Zuordnung *f* zwischen einer abhängigen Variablen *y* und den unabhängigen Booleschen Variablen $x_0, x_1,, \dots, x_{n-1}$

$$y = f(x_0, x_1,, \dots, x_{n-1}) = \quad f(\underline{x}) \qquad \forall \quad x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}; \; y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Beispiel

Exklusiv-Oder

$$y = (x_0 \wedge \overline{x}_1) \vee (\overline{x}_0 \wedge x_1)$$

Anmerkung

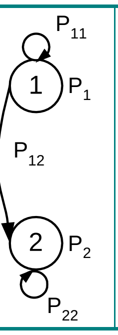
- In der Booleschen Algebra (Schaltlogik) werden die Operatoren $\wedge$ und $\vee$ anstelle der Mengenoperatoren $\cap$ und $\cup$ verwendet.
- Häufig wird de UND-Operator weggelassen oder durch "·" ersetzt ($X \cap Y \equiv X \cdot Y$)

Markoffsche Zuverlässigkeitsmodellierung

Einstieg: "nicht-instandsetzbare Einheit"

Systembeschreibung: Eine Einheit geht in Abhängigkeit von der Zeit t vom Zustand "Funktion" in den Zustand "Ausfall" über.

Überführung des Zeitdiagramms in ein Zustandsdiagramm



1: Zustand 1: "Funktion"; 2: Zustand 2: "Ausfall"

P_1: $P_1(t)$: Zustandswahrscheinlichkeit, dass sich die Einheit zum Zeitpunkt t oder Zeitintervall $t = t+\Delta t$ im Zustand 1 befindet (P_2: $P_2(t)$: entsprechend P_1)

- P_1: $P_1(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{11}(\Delta t)]$
- P_2: $P_2(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{12}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{22}(\Delta t)]$

P_{11}: $P_{11}(\Delta t)$: Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ im Zustand 1 bleibt (P_{22}: $P_{22}(t)$: entsprechend P_{11})

P_{12}: $P_{12}(\Delta t)$: Übergangswahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ vom Zustand 1 in den Zustand 2 übergeht, also ausfällt

Erstellen eines Gleichungssystems

Annahme:

- Ausfallrate λ = konstant $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsmodell der Exponentialverteilung; der Kehrwert von λ nennt sich Mean Time to Failure (MTTF)
- Ausfallwahrscheinlichkeit zur Zeit $t = 0$: $F(t = 0) = 0$

$\lambda \cdot \Delta t$: Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit zwischen t und $t+\Delta t$ ausfällt

Gleichungssystem

$P_1(t+\Delta t) - P_1(t) = -\lambda \Delta t P_1(t)$

$P_2(t+\Delta t) - P_2(t) = +\lambda \Delta t P_1(t)$

dieses Gleichungssystem als Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t)$$

dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

Es gilt allgemein

Ausfalldichte $$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Exponentialverteilung: $$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t);\; R(t) = \exp(-\lambda t)$$
$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$

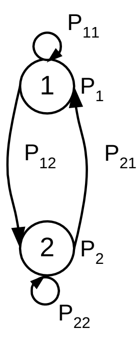
mit
$$P_i = \int \frac{dP_i}{dt} \cdot dt$$

wird au dem Gleichungssystem mit P_1 als Überlebenswahrscheinlichkeit *R(t)*

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t) = -\lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$
$$\frac{d}{dt} P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$

über eine Integration folgt dann
$$P_1(t) = \exp(-\lambda t)$$
$$P_2(t) = 1 - \exp(\lambda t)$$

Zustandsdiagramm einer instandsetzbaren Einheit



1: Zustand 1: "Funktion"; 2: Zustand 2: "in Reparatur"

P_1: $P_1(t)$: Zustandswahrscheinlichkeit, dass sich die Einheit zum Zeitpunkt t oder Zeitintervall $t = t+\Delta t$ im Zustand 1 befindet (P_2: $P_2(t)$: entsprechend P_1)

- P_1: $P_1(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{11}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{21}(\Delta t)]$
- P_2: $P_2(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{12}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{22}(\Delta t)]$

P_{11}: $P_{11}(\Delta t)$: Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ im Zustand 1 bleibt (P_{22}: $P_{22}(t)$: entsprechend P_{11})

P_{12}: $P_{12}(\Delta t)$: Übergangswahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ vom Zustand 1 in den Zustand 2 übergeht, also ausfällt

P_{21}: $P_{21}(\Delta t)$: Übergangswahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ vom Zustand 2 wieder in den Zustand 1 übergeht, also instandgesetzt wird.

Erweitertes Gleichungssystem

mit P_1 als Überlebenswahrscheinlichkeit *R(t)* und *m* als Reparaturrate

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t) + \mu \cdot P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t) - \mu \cdot P_2(t)$$

Dieses Gleichungssystem verlangt andere Lösungsverfahren, meist über die La Place-Transformation. Allerdings gibt es Software zur Darstellung von Zustandsdiagrammen und deren Berechnung, z.B. CARMS[1] (siehe RSN-Website, Freeware).

Reparaturrate $\mu(t)$

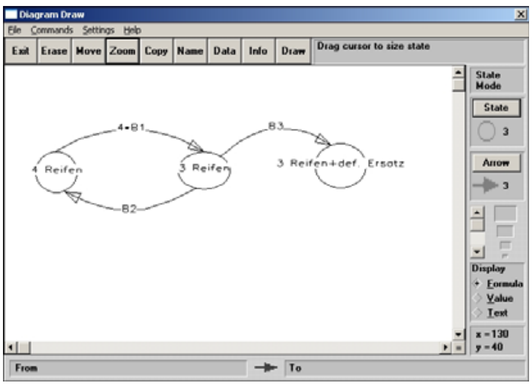
Die Definition der Reparaturrate μ entspricht der Definition der Ausfallrate λ und wird hier als konstant angenommen (und damit ist die Reparaturwahrscheinlichkeit $FR(t) = 1\text{-}\exp[-\mu \cdot t]$). Der Kehrwert von μ nennt sich MTTR (Mean Time to Repair). Kennt man also die mittlere Reparaturdauer, dann ist der Kehrwert die gesuchte (konstante) Reparaturrate.

[1] Computer-Aided Rate Modeling and Simulation

Beispiel 1: Reserverad

Ein Fahrer ist alleine mit einem PW in der Wüste unterwegs. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrzeug mit einem Reifenschaden stehen bleibt, wobei ein Reservereifen mitgeführt wird?

Zustandsdiagramm



Zustände

1: vier Reifen intakt (Reserverad wird nicht benutzt!)

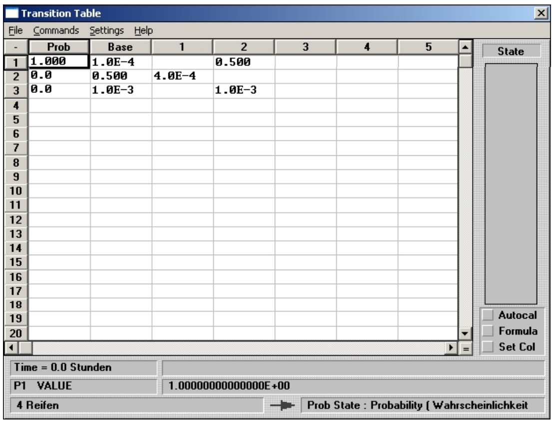
2: drei Reifen intakt, d.h. ein Reifen platt

3: drei Reifen intakt, und Ausfall des Reservereifens.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Quantifizierung



Raten

- B1: Versagen eines Reifens: $\lambda = 10^{-4}$ [1/Stunde]
- B3: Versagen des Reservereifens $\lambda_R = 10^{-3}$ [1/Stunde]
- B2: Reparaturdauer: 2 Stunden $\mu = 0{,}5$ [1/Stunde]

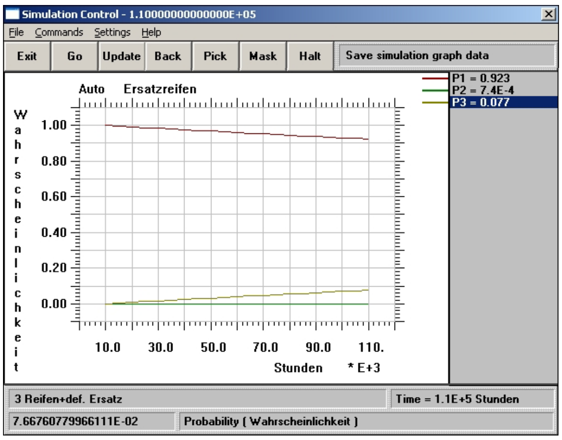
Rahmenbedingung
Wahrscheinlichkeit für den Ausgangszustand
$Pr_1(t=0) = 1$

Anmerkung
Raten sind willkürlich.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Zustandswahrscheinlichkeiten



Nach $1{,}1 \cdot 10^5$ Stunden ist das Fahrzeug zu

$P_1 \approx 92{,}3$ %

verfügbar
und zu

$P_2+P_3 = 1-P_1 \approx 7{,}7\%$

unverfügbar.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Vereinfachung: stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten für t →∞

Vorteil: $\frac{d}{dt}P_i(t) = 0$

das bedeutet, die Steigung der Zuverlässigkeitsfunktion $P_i(t)$ ist nach "unendlich" langer Zeit quasi null.

Beispiele

eine instandsetzbare Einheit

vereinfachtes Gleihungssystem (1)

$$0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$0 = +\lambda \cdot P_1(\infty) - \mu \cdot P_2(\infty)$$

Dies reicht noch nicht aus, um das Gleichungssystem zu lösen, da der *N*-te Zustand aus den vorherigen Zuständen folgt (F = 1 - R).

Die fehlende Information ist die Beziehung $\sum_i P(\infty)_i = 1$

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Für das Gleichungssystem (1) bedeutet dies

$$0 = 1 - P_1(\infty) - P_2(\infty)$$
$$0 = \lambda \cdot P_1(\infty) - \mu \cdot P_2(\infty)$$

oder

$$0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$0 = 1 - P_1(\infty) - P_2(\infty)$$

Beispielsweise ergibt ein Aflösen der linken Gleichung nach $P_2(\infty) = 1 - P_1(\infty)$ und einsetzen in die ober Gleichung des Systems eine Gleichung, die nur noch von $P_1(\infty)$ abhägig ist, d.h. $0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot (1 - P_1(\infty))$

Auflösen nach dem $P_1(\infty)$

ergibt dann die stationäre Wahrscheinlichkeit für den Zustand 1 "Funktion" - mit anderen Worten die stationäre Verfügbarkeit

$$P_1(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Die stationäre Ausfallwahrscheinlichkeit (bzw. Nichtverfügbarkeit) ist dann

$$P_2(\infty) = 1 - P_1(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Beispiel: PW in der Wüste

Gleichungssystem

$$0 = -4\lambda P_1(\infty) + \mu P_2(\infty)$$
$$0 = 4\lambda P_1(\infty) - \lambda_R P_2(\infty) - \mu P_2(\infty)$$
$$0 = 1 - P_1(\infty) - P_2(\infty) - P_3(\infty)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$P_1(\infty) = 0$$
$$P_2(\infty) = 0$$
$$P_3(\infty) = 1$$

Fazit:
nach sehr langer Zeit wird der PW zu 100% nicht verfügbar sein; Zustand 3 ist absorbierend.

Datenquellen

- anlagenspezifische Daten

  Daten, die direkt eine bestimmte Betrachtungseinheit (BE) betreffen und deren Gültigkeit somit zweifelsfrei gegeben ist.

  Aus der Sicht des Analytikers optimal für eine ZA aber meist zuwenig Daten vorhanden

- generische Daten

  Daten, deren Gültigkeit nicht zweifelsfrei gegeben ist und oft auf Veröffentlichungen beruhen

  Übertragbarkeit oft fraglich aber Vermehrung der Datengrundlage

- „expert judgement“

  subjektive Expertenschätzung zum Verhalten einer BE

  für ZA eher ungeeignet aber oft einzige Datenquelle.

Voraussetzungen

Charakterisierung von BE

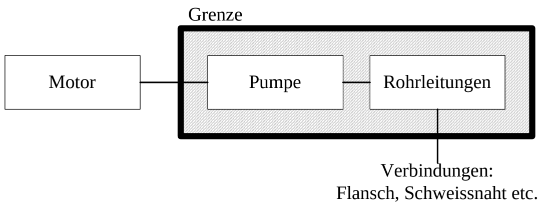
•Gewährleistung der statistischen **Gleichartigkeit** der BE

- Konstruktion, Bauart
- Einsatzbedingungen, d.h. Prozessparameter: Druck, Medium, Umgebung u.a.
- Betriebsbedingungen, z.B. aktiv versus stand-by

•Definition eines Ausfalls

•Festlegen eines Beobachtungszeitraumes

•Komponentengrenzen festlegen



•Dokumentation der Ergebnisse und Festlegungen.

Daten aus anlagenspezifischen Quellen

Übliche Basisunterlagen sind **Betriebsunterlagen** (BU), d.h. Schadensmeldungen, Reparaturaufträge u.ä.

•Ausfallarten-, -ursachen, -auswirkungen sind nur selten festgehalten

•BU sind meist nicht für ZA entworfen:
BU müssen mindestens 90% aller Ausfälle (Ereignisse) erfassen.

Aber: mehr Daten als gemeinhin angenommen für sicherheitsrelevante Einheiten vorhanden.

generelle Erfahrung
sorgfältige Prüfung, ob eine anlagenspezifische Analyse möglich ist.

Erweiterte Datenbasis in der Bayes-Statistik

Vorkenntnisse über das Auftreten von Θ: $\Pr_0(\Theta)$
= Priori-Wissen

vereinigt mit

(zusätzlichen) Erkenntnissen über Θ aus den Versuchs-ergebnissen X: $\Pr_0(X \mid \Theta)$
= Likelihood-Wissen

ergibt

verbesserte Erkenntnisse über über das Auftreten von Θ: $\Pr_0(\Theta \mid X)$
= Posteriori-Wissen

Informationsverknüpfung

- **Ansatz**

$$\Theta_i = \Theta + \varepsilon_i$$

- Θ_i: *i*-ter Parameter der Stichproben i = 1 bis n
- Θ: der allen Messwerten Θ_{i} gemeinsame, unbekannte, ideale Parameterwert, z.B. ein "wahrer" Mittelwert
- ε_i: Abweichung des i-Parameterwertes von Θ (Fehleranteil)

Parameter sind nicht konstant (klassische Statistik) sondern verteilt.

Basisgleichungen

•„Satz der totalen Wahrscheinlichkeit"

$$\Pr(X) = \sum_{i=1}^{k} \Pr(\Theta_i) \cdot \Pr(X \mid \Theta_i).$$

•„Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeit"

$$\Pr(\Theta_i \cap X) = \Pr(\Theta_i) \cdot \Pr(X \mid \Theta_i) = \Pr(X) \cdot \Pr(\Theta_i \mid X).$$

•*Pr(X)*: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *X* („Wirkung")
•*Pr(Θ_i)*: Wahrscheinlichkeit der „Ursache" *i*
•*Pr(X /Θ_i)*: *Wahrscheinlichkeit der „Wirkung" X* unter der Voraussetzung der „Ursache" Θ_i.
•*Pr(Θ_i /X)*: *entsprechend Pr(X /Θ_i).*

Satz von Bayes (stetige Form)

$$f(\Theta_i|\tau) = \frac{f_0(\Theta_i) \cdot f_L(\tau|\Theta_i)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\Theta_i) \cdot f_L(\tau|\Theta_i) \cdot d\Theta}$$

- Θ: abzuschätzender Parameter
- τ: Testergebnisse $\tau = (t_1, t_2, ...t_n)$
- $f_0(Q_i)$: priori-Dichtefunktion
- $f_L(Q_i)$: likelihood-Dichtefunktion
- $f(Q_i)$: posteriori-Dichtefunktion.

Anmerkung: diskrete Form

$$\Pr(\Theta_i|X) = \frac{\Pr_0(\Theta_i) \cdot \Pr_L(X|\Theta_i)}{\sum_{i=1}^{i} \Pr_0(\Theta_i) \cdot \Pr_L(X|\Theta_i)}$$

Eigenschaften

- Ergibt die Likelihood-Wahrscheinlichkeit (sicheres Ereignis) und werden nur (d.h. „nicht X") beobachtet, so folgt für die posteriori-Wahrscheinlichkeit , das bedeutet die Ablehnung einer anfänglich plausiblen Hypothese
- Die Likelihood-Wahrsch. sei für alle *i* gleich. Daraus folgt , d.h. jede weitere Information würde die posteriori-Wahrsch. nicht mehr ändern.
- Ist die a priori-Wahrscheinlichkeit, so gilt für die posteriori-Wahrscheinlichkeit , d.h. die anfängliche Wahrscheinlichkeitsschätzung anhand einer falschen Anfangsinformation wird durch weitere Informationen nicht verändert.
- Bei einer ausreichend grossen Datenmenge ergeben sich für klassische wie für das Bayessche Verfahren identische Wahrscheinlichkeitsschätzungen.

Bayes-Statistik in der Zuverlässigkeitsanalytik

- Bayes gehört zum Standardverfahren der Parameterschätzung, wie schon [2] zeigt.
- Zuverlässigkeitsanalysen in der Kerntechnik als Teil von (level 1) PRA sind ohne Bayes nicht mehr denkbar.
- Weiterführende Literatur: Bayes: [3], [4]; Bayes in der Risikoanalytik: [5], Bayesian Probabilistic Nets: [6]

Einfaches Beispiel

Zwei Ingenieure Ingolf und Ingbert schätzen die MTTF eines neuen Servers. Ingolf schätzt 30 Monate; Ingbert glaubt an 12 Monate. Da beide Ingenieure gleich erfahren sind, (die Wahrscheinlichkeit, dass sie korrekt schätzen jeweils bei 50% liegt) resultiert daraus ein gemittelter Wert:

$$\mathrm{MTTF} = \frac{30+12}{2} = 21\,\mathrm{Monate}.$$

Der Server wird installiert und fällt in einem 6 monatigem Testbetrieb nie aus. Wie sollten aufgrund dieser neuen Erfahrung (a) die Erfahrungen der Ingenieure neu gewichtet werden und wie sollte (b) der neue, angepasste MTTF-Wert aussehen?

Lösung:

$\Pr(\Theta_1) = \Pr(\Theta_2) = 0.5$ seien die a priori-Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Schätzungen der Ingenieure richtig sind. Sind diese korrekt, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines 6 monatigen Betriebes ohne Ausfall (Likelihood)

$$\Pr(X|\Theta_i) = \exp\left[-\frac{t}{\mathrm{MTTF}_i}\right]$$ (falls die Annahme einer konstanten Ausfallrate richtig ist).

Und somit beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit des Servers gemäss

Ingolf: $\Pr(X|\Theta_1) = \exp\left[-\frac{6}{30}\right] = 0.819$

Ingbert: $\Pr(X|\Theta_2) = \exp\left[-\frac{6}{12}\right] = 0.607$

.

Neueinschätzung der Wahrscheinlichkeit (a posteriori), dass sie korrekt schätzen:

$$\Pr(\Theta_1|X) = \frac{0.819\cdot 0.5}{0.819\cdot 0.5 + 0.607\cdot 0.5} = 0.574,$$

$$\Pr(\Theta_2|X) = \frac{0.607\cdot 0.5}{0.819\cdot 0.5 + 0.607\cdot 0.5} = 0.426.$$

Damit ergibt sich ein neuer mittlerer MTTF

$$\mathrm{MTTF} = 0.574\cdot 30 + 0.426\cdot 12 = 22.3\ \mathrm{Monate}$$

Literatur

1. DIN-EN61078.pdf, *Techniken für die Analyse der Zuverlässigkeit: Verfahren mit dem Zuverlässigkeitsblockdiagramm*. 1994, Beuth Verlag: Berlin. p. 1-19.
2. Schneeweiss, W.G., *Zuverlässigkeits-Systemtheorie:Methoden zur Beurteilung der Zuverlässigkeit technischer Systeme*. 1. ed. CCG Texte 1, ed. R. Dierstein and W. Kortüm. 1980, Cologne: Datakontext-Verlag.
3. Schneeweiss, W.G., *Zuverlässigkeitstechnik: von den Komponenten zum System*. 2. Edition ed. CCG Texte 1-2, ed. R. Dierstein. 1992, Cologne: Datakontext-Verlag.
4. Lewis, E.E., *Introduction to Reliability Engineering*. 1987, New York: John Wiley & Sons.
5. Birolini, A., *Reliability Engineering: Theory and Practice*. 4. ed. 2004, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
6. Gottinger, H.W., *Bayesian Analysis, Probability and Decision*. Angewandte Statistik und Ökonometrie. Vol. Band 2. 1975, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 116.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Grundlagen der technischen Risikoanalytik

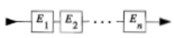
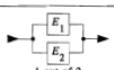
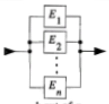
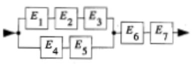
Modellierungsansätze Annex

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

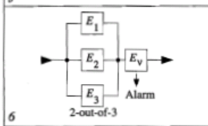
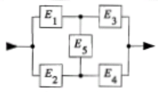
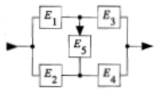
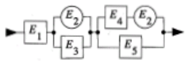
Weitere ZBD und zugehörige Zuverlässigkeitsfunktionen

Tabelle 3.1 Typische Strukturen von Zuverlässigkeitsblockdiagrammen und entsprechende Zuverlässigkeitsfunktionen (Annahmen: nichtreparierbar bis zum Systemausfall, heiße Redundanz, unabhängige Elemente; der Index i bezieht sich auf das Element E_i)

Reliability Block Diagram	Reliability Function ($R_S = R_{S0}(t)$; $R_i = R_i(t)$, $R_i(0)=1$)	Remarks
1 	$R_S = R_i$	One-item structure, $\lambda(t) = \lambda \Rightarrow R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$
2 	$R_S = \prod_{i=1}^{n} R_i$	Series structure, $\lambda_S(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)$
3  1-out-of-2	$R_S = R_1 + R_2 - R_1 R_2$	1-out-of-2-redundancy, $R_1(t) = R_2(t) = e^{-\lambda t}$ $\Rightarrow R_S(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
4  k-out-of-n	$E_1 = \ldots = E_n = E$ $\rightarrow R_1 = \ldots = R_n = R$ $R_S = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$	k-out-of-n redundancy for $k = 1$ $\Rightarrow R_S = 1 - (1-R)^n$
5 	$R_S = (R_1 R_2 R_3 + R_4 R_5 - R_1 R_2 R_3 R_4 R_5) R_6 R_7$	Series/parallel structure

Quelle: [1], *p*. 31

Weitere ZBD und zugehörige Zuverlässigkeitsfunktionen

6 	$E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\rightarrow R_1 = R_2 = R_3 = R$ $R_S = (3R^2 - 2R^3) R_v$	Majority redundancy, general case $(n+1)$-out-of-$(2n+1)$, $n = 1, 2, ...$
7 	$R_S = R_5 (R_1 + R_2 - R_1 R_2) \cdot (R_3 + R_4 - R_3 R_4) + (1 - R_5) \cdot (R_1 R_3 + R_2 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_4)$	Bridge structure (bi-directional on E_5)
8 	$R_S = R_4 [R_2 + R_1 (R_3 + R_5 - R_3 R_5) - R_1 R_2 (R_3 + R_5 - R_3 R_5)] + (1 - R_4) R_1 R_3$	Bridge structure (unidirectional on E_5)
9 	$R_S = R_2 R_1 (R_4 + R_5 - R_4 R_5) + (1 - R_2) R_1 R_3 R_5$	The element E_2 appears twice in the reliability block diagram (not in the hardware)

Quelle: [1], *p.* 31

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMAVT
Departement Maschinenbau & Verfahrenstechnik
Department of Mechanical & Process Engineering

Daten aus generischen Quellen

Problematiken

- Übertragbarkeit der Daten ist nicht zwingend gegeben
- Allgemeiner Datenmangel und
- oft veraltete Daten und mangelhafte Dokumentation
- Die Verfügbarkeit von Daten ist branchenspezifisch. Während in der Kerntechnik nationale und internationale Datenbanken aufgebaut wurden, liegen für die ***Chemie*** kaum Datenquellen vor: Die aktuelleren Datenquellen sind:
  - EIREDA 1998 [2]
  - AICHE 1989 [3]
  - OREDA [4]
  - SINTEF 2004 [5]
- **Anmerkung**: EIREDA und AICHE basieren auf gewichteten Daten aus der Kerntechnik, OREDA bezieht sich nur auf Off-shore-Anlagen und SINTEF auf „Computer-Based Safety Systems".

Beispiel für ein Datenblatt (EIREDA)

TABLES OF RELIABILITY DATA 29

1998 EDITION	**EUROPEAN INDUSTRY RELIABILITY DATA BANK**	table 6 of 220

COMPONENT: **COMPRESSORS, Reciprocating**

SAMPLE 1978-1987 plant-years: 80 No components/plant: 2
1988-1993 eqt-years: 62

	Failure Rate			Probability of Failure on Demand			Mean Active Repair	
	λ/h (E-6)		EF	γ/d (E-3)		EF	MTTR (h)	Man-hours
Prior (78/87), Critical Failures	37 •		1.6	0.12		4.2	17	35
Likelihood (88/93)	No Failures 13		Cum.Time (h) 3.69 E+5	No Failures 6		No Demands 1.976 E+4	5	9
Post. Mean	36			0.23				
Prob. Interval	90%	25.3	48.7	80%	0.14	0.34		
Posterior pdf	Gamma (26, 7.19 E+5)			Beta (8.6, 3.697 E+4)				

Mode 1 : Loss of performance: 0.40	Mode 2 : Lubrication: 0.16

Other Sources		λ /h. E-6	EF	γ /d. E-3	EF	MTTR (h)	Man-hours
EDF	1995C	52.9	1.5			9.6	
	All (78-93)	224	1.2			11	33
OREDA••	Critical	785	2			10.9	
	All	1942	1.5			9.5	
	Sample	Aggregated calendar time in service: 0.14 E-6 h					
Oil Industry	Critical	1400	1.5	1.6		11	
	All					38	
	Sample	electric motor included. 0.5-10 MW.					
	Critical						
	All						
	Sample						
	Critical						
	All						
	Sample						

Comments:
- • Semi-permanent compressors (approximately 2000h/year).
  CP0 plant; reciprocating compressor (5.5 kW): $\hat{\lambda}$ = 44.6 E-6/h ; EF = 1.5.
- •• Critical failures of electric motor driven gas compressor (500 - 3200 kW, up to 1300 m^3/h) included.

MIL-HDBK-217F

6.1 DIODES, LOW FREQUENCY

SPECIFICATION
MIL-S-19500

DESCRIPTION
Low Frequency Diodes: General Purpose Analog, Switching, Fast Recovery, Power Rectifier, Transient Suppressor, Current Regulator, Voltage Regulator, Voltage Reference

$$\lambda_p = \lambda_b \pi_T \pi_S \pi_C \pi_Q \pi_E \quad \text{Failures}/10^6 \text{ Hours}$$

Base Failure Rate - λ_b

Diode Type/Application	λ_b
General Purpose Analog	.0038
Switching	.0010
Power Rectifier, Fast Recovery	.069
Power Rectifier/Schottky Power Diode	.0030
Power Rectifier with High Voltage Stacks	.0050/ Junction
Transient Suppressor/Varistor	.0013
Current Regulator	.0034
Voltage Regulator and Voltage Reference (Avalanche and Zener)	.0020

Temperature Factor - π_T
(General Purpose Analog, Switching, Fast Recovery, Power Rectifier, Transient Suppressor)

T_J (°C)	π_T	T_J (°C)	π_T
25	1.0	105	9.0
30	1.2	110	10
35	1.4	115	11
40	1.6	120	12
45	1.9	125	14
50	2.2	130	15
55	2.6	135	16
60	3.0	140	18
65	3.4	145	20
70	3.9	150	21
75	4.4	155	23
80	5.0	160	25
85	5.7	165	28
90	6.4	170	30
95	7.2	175	32
100	8.0		

$$\pi_T = \exp\left(-3091\left(\frac{1}{T_J + 273} - \frac{1}{298}\right)\right)$$

T_J = Junction Temperature (°C)

Temperature Factor - π_T
(Voltage Regulator, Voltage Reference, and Current Regulator)

T_J (°C)	π_T	T_J (°C)	π_T
25	1.0	105	3.9
30	1.1	110	4.2
35	1.2	115	4.5
40	1.4	120	4.8
45	1.5	125	5.1
50	1.6	130	5.4
55	1.8	135	5.7
60	2.0	140	6.0
65	2.1	145	6.4
70	2.3	150	6.7
75	2.5	155	7.1
80	2.7	160	7.5
85	3.0	165	7.9
90	3.2	170	8.3
95	3.4	175	8.7
100	3.7		

$$\pi_T = \exp\left(-1925\left(\frac{1}{T_J + 273} - \frac{1}{298}\right)\right)$$

T_J = Junction Temperature (°C)

- Elektronik und Elektrotechnik
  - MIL-HDK-217 G [7]
    wird nicht mehr aktualisiert
  - Bellcore (auch Telcordia SR-332) standards (Herausgeber AT&T Bell Labs).
    vor allem in der Fernmeldeindustrie verbreitet und dem Verfahren nach MIL-HDBK-217 sehr ähnlich; zuletzt im Mai 2001 aktualisiert
    [http://www.ramssoft.info/beratung/prediction/begriffe.html].
  - IEC 62380 TR Edition 1
- Mechanische Bauteile
  - NSWC-98/LE1 - Handbook of Reliability Prediction Procedures for Mechanical Equipment

Literatur

1. Birolini, A., *Reliability Engineering: Theory and Practice*. 4. ed. 2004, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
2. Roberts, N.H., et al., *Fault Tree Handbook (NUREG-0492)*. 1981, Washington, D.C.: U.S. Nuclear Regulatory Commission. 209.
3. Cooke, R.M., *Experts in Uncertainty - Opinion and Subjective Probability in Science*. 1991, New York: Oxford University Press.
4. Giribone, R. and B. Valette, *Principles of Failure Probability Assessment (PoF).* International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2004. **81**(10-11): p. 797-806.
5. Kaplan, S. and B.J. Garrick, *On the Quantitative Definition of Risk.* Risk Analysis, 1981. **1**(No. 1): p. 11-27.
6. Faber, M.H., *Bayesian Probabilistic Nets - An Introduction*. 2001: Zurich. p. 98.
7. Martz, H.F. and R.A. Waller, *Bayesian Reliability Analysis*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Applied Probability and Statistics. 1982, New Aork: John Wiley & Sons.